BÀI TẬP CHUYÊN ĐỀ GIỚI HẠN HÀM SỐ

A. PHẦN TNKQ.

Câu 1. Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$ và $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 1$. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)+g(x)\right]$ bằng:

A. 5. **B.** 6. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

$$\lim_{x\to 2}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x) = 4+1=5$$

Câu 2. Tính $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2+1\right)$ ta được kết quả là:

A. 9. **B.** 5. **C.** -7. **D.** $+\infty$.

Lời giải

$$\lim_{x\to -2}\left(2x^2+1\right) = 2(-2)^2+1=9$$

Câu 3. Tính $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+1}{x-1}$ ta được kết quả là:

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** 2. **D.** $-\infty$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(2x+1)\frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^-}(2x+1) = 3 > 0; \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1} = -\infty$$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}(2x+1)\dfrac{1}{x-1} = 3.(-\infty) = -\infty$

Câu 4. Tính $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+5}{x-1}$ ta được kết quả là:

A. 0. **B.** 2 **C.** $+\infty$. **D.** -5.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+5}{x-1} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2+\frac{5}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \dfrac{2+0}{1-0} = 2.$

Câu 5. Tính $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$ ta được kết quả là::

A. 0 **B.** 4 **C.** $+\infty$. **D.** 8

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)(x-4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(x+4)=4+4=8.$

Câu 6. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

$$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{1}{4}$$

Câu 7. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)$ bằng

A. -4. **B.** -2. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x+2}{\sqrt{x^2-4x+2}+x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-4+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1}=-2$$

Câu 8. Tính $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{2x^2-4}{x-\sqrt{2}}=a\sqrt{b}$. Khi đó: $P=2b-a$

A. 0 **B.** 2 **C.** 6 **D.** 4

Lời giải

$$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{2x^2-4}{x-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}2(x+\sqrt{2})=4\sqrt{2}=a\sqrt{b}$$
$$\Rightarrow a=4;b=2\Rightarrow P=2.2-4=0$$

B. PHẦN TỰ LUẬN.

Câu 1. Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

Lời giải

$$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x-2)=1$$

Câu 2. Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{4x-4}$

Lời giải

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{4x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x-1)}{4(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{4}=\frac{1}{4}$$

Câu 3. Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^3-8}$

Lời giải

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2+2x+4}=\frac{1}{12}$$

Câu 4. Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}+x\right)$

Lời giải

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+5}+x\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x+5}{\sqrt{x^2-2x+5}-x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2+\frac{5}{x}}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-1}=1$$

Câu 5. Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x+2023}{x-2}$

Lời giải

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3x+2023}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}(3x+2023)\frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^+}(3x+2023)=2029>0;\ \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x+2023}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}(3x+2023)\dfrac{1}{x-2}=2029.(+\infty)=+\infty$

Câu 6. Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+3}-2x}{5x+1}$

Lời giải

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{9x^2+3}-2x}{5x+1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-\sqrt{9+\frac{3}{x^2}}-2}{5+\frac{1}{x}}=-1$$

Câu 7. Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x^2-x+5}{1+2x^2}$

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-x+5}{1+2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x}+2}=2$$

Câu 8. Tính giới hạn sau với a là một số thực khác 0: $\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}$

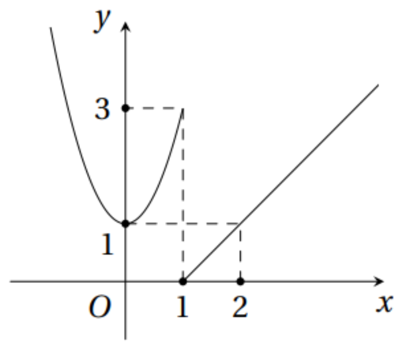
Lời giải

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-a)}{(x-a)(x+a)}=\lim_{x\to a}\frac{x-1}{x+a}=\frac{a-1}{2a}$$

BÀI TẬP CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. PHẦN TNKQ

Câu 1. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới đây. Hàm số gián đoạn tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?



A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Dựa vào đồ thị như hình vẽ, hàm số gián đoạn tại điểm có hoành độ bằng 1.

Câu 2. Hàm số nào sau đây liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$?

A. $y = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$. **B.** $y = \sqrt{x+1}$ **C.** $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. **D.** $y = \tan x$.

Lời giải

Hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$ không liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = \sqrt{x+1}$ có tập xác định $D = [-1;+\infty)$ không liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. có tập xác định $D = \mathbb{R}$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ không liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Câu 3. Hàm số nào sau đây gián đoạn tại điểm $x_o = -2$

A. $y = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ **B.** $y = \dfrac{x^2-2x}{2x-4}$ **C.** $y = \sqrt{x-4}$ **D.** $y = x^3 + 2x - 1$

Lời giải

Hàm số $y = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ xác định khi $x \neq -2$ nên bị gián đoạn tại $x_o = -2$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-3}{x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số f(x) liên tục trên R

B. Hàm số f(x) gián đoạn tại $x=\dfrac{3}{2}$

C. Hàm số f(x) là hàm đa thức

D. Hàm số f(x) gián đoạn tại $x=0$

Lời giải

Hàm số $f(x)=\dfrac{2x-3}{x}$ xác định khi $x\neq 0$ nên bị gián đoạn tại $x=0$

Câu 5. Hàm số nào trong các phương án sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $f(x)=5x^2-4x^3+6\sqrt{3}$

B. $f(x)=\dfrac{1}{x}$

C. $f(x)=\sqrt{2x+4}$

D. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+x}$

Lời giải

Hàm số $f(x)=5x^2-4x^3+6\sqrt{3}$ có TXĐ là R nên liên tục trên R

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}5-2x & \text{khi } x\leq 1\\ x+2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Chọn khẳng định **sai**.

A. Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

B. Hàm số $f(x)$ liên tại $x=1$.

C. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=2$.

D. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=5$.

Lời giải

Do $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=3$ suy ra hàm số liên tục tại x = 1.

Câu 7. Tìm tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+x}{x} & khi\ x<0\\ m-1 & khi\ x\geq 0\end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 0$.

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=m-1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x^2+x}{x}=1\end{array}\right\}\Rightarrow m-1=1\Leftrightarrow m=2$$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{mx^2+(2m+1)x} & \text{khi } x\neq 0\\ 3 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Biết khi $m=m_0$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$. Chon khẳng định đúng.

A. $m_0 \in (-\infty;0)$. **B.** $m_0 \in [0;4]$. **C.** $m_0 \in (4;5]$. **D.** $m_0 \in (5;+\infty)$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{mx^2+(2m+1)x} = \frac{2}{2m+1}$$

$$f(0)=3$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2m+1}=3 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{6} \Rightarrow m_0=-\frac{1}{6}\in(-\infty;0)$$

B. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1: Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ tại điểm $x_0=2$

Lời giải

Tập xđ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}, 2\in \mathrm{D}$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{2}{x-1}=1=f(2)$$

Vậy hàm số liên tục tại $x_0=2$.

Câu 2: Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{2} & khi\ \ x\le 1 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & khi\ x>1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$

Lời giải

Tập xđ: $D=\mathbb{R}, 1\in \mathrm{D}$. $f(1)=-\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-2}{x+1}=-\frac{1}{2}$$

Vậy hàm số liên tục tại $x_0=1$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x\ne 2 \\ mx+1 & \text{khi } x=2 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=2$.

Lời giải

$D=\mathbb{R}, 1\in \text{D}$ $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f\left(2\right)=2m+1$ và $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2\text{x}+4\right)=12$.

Để $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=2$ thì $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=f\left(2\right)\Leftrightarrow 2m+1=12\Leftrightarrow m=\frac{11}{2}$.

Câu 4: Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{x+\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{, khi } x>-1\\ 2x+3 & \text{, khi } x\le -1\end{cases}$. tại $x_0=-1$

Lời giải

Ta có: $f\left(-1\right)=1$ và $\lim\limits_{x\to (-1)^-} f\left(x\right)=1$.

$\lim\limits_{x\to (-1)^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to (-1)^+}\frac{x+\sqrt{x+2}}{x+1}=\lim\limits_{x\to (-1)^+}\frac{x^2-x-2}{\left(x+1\right)\left(x-\sqrt{x+2}\right)}=\lim\limits_{x\to (-1)^+}\frac{x-2}{x-\sqrt{x+2}}=\frac{3}{2}$.

Suy ra: $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f\left(x\right)\ne \lim\limits_{x\to (-1)^-} f\left(x\right)$.

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=-1$.

Câu 5: Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+2 & \text{khi } x\ge 0\\ x^2+a & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Lời giải

Trên $\left(0;+\infty\right),\left(-\infty;0\right)$ hàm số là các hàm số đa thức nên nó đều liên tục trên các khoảng đó

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ ta cần hàm số liên tục tại 0

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=2, \lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=a, f\left(0\right)=2$

Vậy hàm số liên tục tại $x_0=2$ khi và chỉ khi $a=2$.

Câu 6: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x\ge 2\\ \frac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

Ta có $f\left(2\right)=3; \lim\limits_{x\to 2^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right)=3$.

Nếu $m=6$ thì $\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+1}{x^2-12x+20}=-\infty$ nên hàm số không liên tục tại $x=2$.

Nếu $m \neq 6$ thì ta có $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+1}{x^2 - 2mx + 3m + 2} = \dfrac{3}{6-m}$.

Để hàm số liên tục tại $x = 2$ thì $\dfrac{3}{6-m} = 3 \Leftrightarrow 6 - m = 1 \Leftrightarrow m = 5$.

Với $m = 5$ thì khi $x < 2$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 10x + 17}$ liên tục trên $(-\infty; 2)$.

Tóm lại với $m = 5$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 7: CMR phương trình $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có 3 nghiệm trong khoảng $(-2; 2)$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ liên tục trên R nên cũng liên tục trên các đoạn $[-2;-1];[-1;1];[1;2]$

$f(-2) = -3 < 0, f(-1) = 5 > 0, f(1) = -3, f(2) = 5$

Vậy trên mỗi khoảng $(-2;-1);(-1;1);(1;2)$ phương trình có ít nhất nghiệm. Mà ba khoảng này rời nhau nên phương trình có 3 nghiệm trong khoảng $(-2; 2)$.

Câu 8: CMR phương trình $x^3 + (m+3)x^2 + (1-m)x - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 + (m+3)x^2 + (1-m)x - 1$ liên tục trên R nên cũng liên tục trên các đoạn $[0;1]$

$f(0) = -1 < 0, f(1) = 4 > 0,$

Vậy trên khoảng $(0;1)$ phương trình có ít nhất nghiệm.